



Unidad 8.3: Exponenciales y relaciones cuadráticas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)

Resumen de la Unidad:

En esta unidad, el estudiante aprenderá a distinguir entre representaciones lineales y no lineales, y estudiará los tipos de funciones no lineales y sus representaciones. El estudiante resolverá ecuaciones cuadráticas y las usará para resolver problemas de la vida diaria. También estudiará funciones exponenciales y las formas generales de la ecuación, y aprenderá a multiplicar ecuaciones lineales y factores cuadráticos.

Preguntas Esenciales (PE) y Comprensión Duradera (CD)

PE1 ¿Cómo sabes si una relación es lineal o no lineal?

CD1 Las relaciones de la vida diaria pueden ser modeladas por ecuaciones lineales y no lineales.

PE2 ¿Cómo se puede expresar una relación no lineal?

CD2 Las relaciones no lineales se pueden expresar de muchas maneras.

PE3 ¿De qué manera nos ayuda una función no lineal a entender el mundo a nuestro alrededor?

CD3 Las funciones describen relaciones que nos permiten predecir futuros resultados.

Objetivos de Transferencia (T) y Adquisición (A)

T1. Los estudiantes podrán calcular ecuaciones no lineales y formar equivalentes exponenciales y relaciones cuadráticas.

El estudiante adquiere destrezas para ...

A1. Dada una ecuación, gráfica o tabla, determinar si la relación es lineal o no lineal.

A2. Dado un conjunto de gráficas, identificar la función lineal, cuadrática y exponencial.

A3. Dada una ecuación en forma general, determinar si es lineal, exponencial o cuadrática.

A4. Dado un problema de la vida diaria, resolverlo usando una ecuación cuadrática.

Los Estándares de Puerto Rico (PRCS)

Estándar de Álgebra

8.A.5.1 Multiplica un par de expresiones lineales e interpreta el resultado de la operación numéricamente por evaluación, por medio de una tabla de valores y gráficamente.

- Reconoce que al multiplicar factores lineales produce relaciones no lineales.

8.A.6.1 Reconoce y aplica las propiedades de los exponentes enteros y racionales para formar expresiones numéricas equivalentes (ejemplo: $z^2 \times z^{-5} = z^{-3} = 1/z^3$).



Unidad 8.3: Exponenciales y relaciones cuadráticas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

8.A.6.2	Describe los efectos de los cambios en el coeficiente, la base y el exponente en el comportamiento de una función exponencial. Distingue entre las representaciones generales para ecuaciones exponenciales ($y = b^x$, $y = a(b)^x$) y ecuaciones cuadráticas ($y = -x^2$; $2y = (-x)^2$; $y = x^2$; $y = ax^2$; $y = x^2 + c$; $y = ax^2 + c$) y describe cómo los valores a, b, c afectan su gráfica.
8.A.6.3	Desarrolla y describe las múltiples representaciones de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas y exponenciales por medio de manipulativos, tablas, gráficas, expresiones simbólicas y la tecnología.
Procesos y Competencias Fundamentales de Matemáticas (PM)	
PM1	Comprende problemas a medida que desarrolla su capacidad para resolverlos con confianza.
PM2	Razona de manera concreta, semiconcreta, hasta alcanzar la abstracción cuantitativa.
PM3	Construye y defiende argumentos viables, así como comprende y critica los argumentos y el razonamiento de otros.
PM4	Utiliza las matemáticas para resolver problemas cotidianos de la vida diaria.
PM5	Utiliza las herramientas apropiadas y necesarias (incluyendo la tecnología) para resolver problemas en diferentes contextos.
PM6	Es preciso en su propio razonamiento y en discusiones con otros/
PM7	Discierne y usa patrones o estructuras.
PM8	Identifica y expresa regularidad en los razonamientos repetidos.



Unidad 8.3: Exponenciales y relaciones cuadráticas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)		ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)	
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	DOMINIO y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tarea de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<p>PRCS: 8.A.5.1</p> <p>PM: PM1 PM2 PM3 PM4 PM7</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE2/CD2 PE3/CD3</p> <p>T/A: T1/A1/A2/A3</p>	<p><i>Representaciones de funciones cuadráticas y exponenciales.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Como identificar y clasificar las relaciones exponenciales y cuadráticas no lineales usando su tasa de cambio, formas simbólicas, y sus representaciones gráficas. Como multiplicar expresiones lineales. Como evaluar el producto de expresiones lineales usando una tabla de valores y gráficas. Como demostrar que la multiplicación lineal de funciones tiene como producto funciones no lineales. 	<p><i>Representación Patrones, Relaciones y Funciones Modelos Matemáticos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Resolver relaciones exponenciales y cuadráticas no lineales por su tasa de cambio, forma y representación gráfica Aplicar la multiplicación de expresiones lineales al evaluar su producto para completar la tabla de valores y construir la gráfica Debatir sobre el producto obtenido al multiplicar funciones lineales. 	<p><i>Para obtener descripciones completas, favor de ver la sección ‘Tareas de desempeño’ al final de este mapa.</i></p> <p><i>El Problema Ewok-Jawa (personajes en “Star Wars”) (parejas)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Una bandada de 45 Ewoks se han estrellado anoche en el Bosque Nacional. Por coincidencia, una bandada de Jawas se estrelló cerca de los Ewoks. Los estudiantes deben calcular el crecimiento de ambas poblaciones. (ver abajo) 	<p><i>Problemas de ejemplo para Prueba Corta</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas o lineales: $X+8=10$ $10+r=5$ $7k + 5k=72$ $y^2-81=0$ $n^2=8n$ $x^2=49$ <p><i>Registro diario de Matemáticas (Ejemplos de sugerencia)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> ¿Cómo puedes saber si una ecuación es lineal o no lineal? ¿Cómo se relacionan las funciones lineales y no lineales? ¿Cree usted que las funciones cuadráticas tienen pendiente? Explique su razonamiento. <p><i>Papelito de Entrada (Ejemplos de sugerencia)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Explique una idea que recuerde de la clase de ayer. Dime una idea que no entendiste de la 	<p><i>Para obtener descripciones completas, ver las secciones “Actividades de aprendizaje” y “Ejemplos para planes de la lección” al final de este mapa.</i></p> <p><i>Juego de Cuadrados – Factorizar</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes practicarán la multiplicación de expresiones lineales para producir expresiones cuadráticas. (ver anejo: “8.3 Actividad de Aprendizaje – Juego de Cuadrados: Factorizar”) <p><i>Matemáticas como Juego de Pelota</i></p> <ul style="list-style-type: none"> En la pizarra, dibuje un diamante grande de baseball. Etiquete las bases, 1era, 2nda, 3ra y Home. Divida la clase en dos equipos. Equipo A “lanza” un problema de la lista ya preparada al primer bateador del equipo. Después de tres expulsiones (respuestas incorrectas), el siguiente equipo va al bate. (ver abajo) <p><i>Ejemplo 1 para planes de la lección: Relación vs. Función y Lineal vs. No lineal</i></p>



Unidad 8.3: Exponenciales y relaciones cuadráticas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	DOMINIO y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tarea de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
Vocabulario de Contenido <ul style="list-style-type: none"> • Función Exponencial • Ecuación Cuadrática • Variable • Coeficiente • Propiedad distributiva • Base • Exponente • Equivalente • Entero 				tarea de anoche. <ul style="list-style-type: none"> • Explica que fue lo más difícil (fácil) sobre la tarea de anoche. <p><i>Papelito de Salida (Ejemplos de sugerencia)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Hoy en clase he aprendido _____. • Hoy he estado confundido con _____. 	<ul style="list-style-type: none"> • Los estudiantes desarrollarán conceptos y habilidades relacionadas al reconocimiento de diferencias entre funciones lineales y no lineales y las diferencias entre las funciones y las relaciones. (ver anejo “8.3 Lección de Practica Relación vs. Función y Lineal vs. No lineal”)



Unidad 8.3: Exponenciales y relaciones cuadráticas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido (El estudiante comprenderá...)	Dominio y Destrezas (El estudiante podrá ...)	Tarea de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
<p>PRCS: 8.A.6.1 8.A.6.2 8.A.6.3</p> <p>PM: PM1 PM2 PM3 PM4 PM7 PM8</p> <p>PE/CD: PE1/CD1 PE2/CD2 PE3/CD3</p> <p>T/A: T1/A1/A2/A4</p>	<p><i>Comportamiento de gráficas.</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Como aplicar las propiedades de los exponentes de los enteros. Los efectos de cambio del coeficiente, base, y exponente en el comportamiento de una función exponencial. Como distinguir entre funciones exponenciales y cuadráticas. Como desarrollar y describir las soluciones de funciones cuadráticas y exponenciales usando manipulativos, tablas, gráficas, expresiones simbólicas y tecnología. 	<p><i>Patrones, Relaciones y Funciones</i> <i>Representación</i> <i>Modelos matemáticos</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Efectuar operaciones entre funciones exponenciales aplicando las propiedades Comentar y debatir sobre los cambios surgidos en funciones exponenciales y cuadráticas por el cambio en el coeficiente, base y exponente Manipular y modelar con tablas, gráficas, tecnología y manipulativos las soluciones de funciones cuadráticas y exponenciales 	<p><i>El Cohete (parejas)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> La ruta del cohete modelo puede ser descrita por la función cuadrática $y = -x^2 - 12x$, donde los puntos (x, y) representan la altura (y) del cohete (en metros) a la hora x segundos después del despegue. Identifica la altura máxima del cohete, y determina la hora en la que el alcanza su máxima altura. (ver anejo: “8.3 Tarea de Rendimiento – El Cohete”) 	<p><i>Problemas de ejemplo para Prueba Corta</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Una población de 20 conejos se multiplica tres veces cada 6 meses. La función $f(x)=20(3)^x$ representa la población cada medio año. ¿Cuántos conejos habrán en 3 años? <p><i>Registro diario de Matemáticas (Ejemplos de sugerencia)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Brinde un ejemplo de la vida diaria de una relación que sea exponencial. <p><i>Papelito de Entrada (Ejemplos de sugerencia)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Explique una idea que recuerde de la clase de ayer. Dime una idea que no hayas entendido de la tarea de anoche. Explique qué fue lo más difícil (fácil) sobre la tarea de anoche. <p><i>Papelito de Salida (Ejemplos de sugerencia)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Hoy en clase he aprendido _____. Hoy estuve confundido con _____. 	<p><i>Exponentes Tic Tac Toe</i></p> <ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes jugarán tic tac toe al practicar las reglas de los exponentes (ver anejo “8.3. Actividad de Aprendizaje-Tic Tac Toe”) <p><i>Ejemplo 2 para planes de la lección: Aplicaciones Cuadráticas</i></p> <ul style="list-style-type: none"> En esta lección los estudiantes usan ecuaciones cuadráticas para resolver problemas de la vida diaria. (ver anejo: “8.3 Lección de Practica – Aplicaciones Cuadráticas”)



Unidad 8.3: Exponenciales y relaciones cuadráticas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 1 – (Resultados esperados)			ETAPA 2 (Evidencia de avalúo)		ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)
Alineación de la Unidad	Enfoque de Contenido <i>(El estudiante comprenderá...)</i>	Dominio y Destrezas <i>(El estudiante podrá ...)</i>	Tarea de desempeño	Otra evidencia	Actividades de aprendizaje sugeridas y Ejemplos para planes de la lección
Vocabulario de Contenido					
<ul style="list-style-type: none">• Función Exponencial• Función Cuadrática• Variable• Coeficiente• Base• Exponente• Comportamiento					



Unidad 8.3: Exponenciales y relaciones cuadráticas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

ETAPA 3 (Plan de aprendizaje)

Conexiones a la literatura sugeridas

- **Carlos Fernández Pérez and José M. Montaner**
 - *Ecuaciones Diferenciales/Differential Equations – II: Ecuaciones No Lineales*
- **Félix Nieto**
 - *Sistemas de Ecuaciones*
- **Luz Manuel Santos Trigo**
 - *La Función Cuadrática/The Quadratic Function: Enfoque de Resolución de Problemas/Problem-Solving Approach*
- **Francisco M. Piscoya H.**
 - *Estructuras Algebraicas VI: Formas Cuadráticas*

Recursos adicionales

- <http://figurethis.org/espanol.htm>
- <http://nlvm.usu.edu/es/nav/vlibrary.html>
- <http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/>



Unidad 8.3: Exponenciales y relaciones cuadráticas
Matemáticas
5 semanas de instrucción

Tarea de desempeño

Nota: Utilice los documentos: 1) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Educación Especial o Rehabilitación Vocacional y 2) estrategias de educación diferenciada para estudiantes del Programa de Limitaciones Lingüísticas en Español e inmigrantes (Titulo III) para adaptar las actividades, tareas de desempeño y otras evidencias para los estudiantes de estos subgrupos.

El Problema Ewok-Jawa(Personajes de "Star Wars") (parejas)

- Los estudiantes deben calcular el crecimiento de ambas poblaciones.
 1. Una bandada de 45 Ewoks se han estrellado anoche en el Bosque Nacional. Esto parece ser un pequeño problema, pero la población crecerá a una tasa rápida de 22% al año. Escriba una ecuación para describir la población en cualquier año solicitado. También cree una tabla que muestre la población de Ewok cada cinco años desde el presente hasta el año 2050.
 2. Por coincidencia, una bandada de Jawas se estrelló cerca de Ewoks. Los Jawas tienen un modelo de crecimiento representado en la ecuación $A = 105(0.91)^t$, donde A es la población en algún momento, t , dado en años. ¿Está la población aumentando? ¿Decreciendo? ¿Estancada? Explique su razonamiento.
- Los maestros deben evaluar a los estudiantes en lo correcto de las matemáticas y la explicación del razonamiento usado.



Unidad 8.3: Exponenciales y relaciones cuadráticas

Matemáticas

5 semanas de instrucción

Actividades de aprendizaje sugeridas

Matemáticas como juego de pelota

- Se juega como un juego regular de pelota. El objeto del mismo es ser del equipo que anote más carreras después de nueve entradas. En la pizarra, dibuje un diamante grande de baseball. Etiquete las bases, 1era, 2nda, 3ra y Home. Prepare dibujos de animales laminados del internet para crear “estudiantes” que corran a las bases. Divida la clase en dos equipos, escoja un líder para cada equipo. Cada equipo debe organizar su línea de “bateadores”, al decidir quién va primero, segundo, etc. El equipo A “lanza” un problema de la lista ya preparada al primer bateador del equipo. Los problemas pueden incluir expresiones lineales, encontrando la tasa de cambio de una expresión, e interpretar el producto de la expresión lineal usando la tabla de valores y gráficas. Todos los estudiantes deben tratar cada problema dado a su equipo para práctica. Si el bateador pierde el problema, significa una expulsión. Si el bateador responde el problema correctamente, ella/el avanza a 1era base. Marque esa posición en la pizarra. Los jugadores rodean las bases en la misma forma que se hace en el juego de pelota (excepto que el jugador solo puede avanzar con respuestas correctas). Después de tres expulsiones (respuestas incorrectas), el siguiente equipo va al bate. ¡El juego continua durante nueve entradas!
- Modificaciones:
 - Los estudiantes lanzaran un cubo numérico para determinar cuántas bases pueden avanzar:
 - 1, 2, o 3- avanza una base
 - 4- avanza 2 bases
 - 5- avanza 3 bases
 - 6- ¡home run!
 - Para hacer el juego más corto, los estudiantes cambiarán de equipos después de la primera expulsión.
 - Materiales: Una hoja de registro para cada jugador, una lista de alrededor de 100 problemas.